873. *Pythagorian ring* ニ就テ I

吉田　耕作（阪大）

"*Spectral analysis*" ノ代數的取扱ヒハ此頃ノとぴっくすデアッテ von Neumann H. Freudenthal, S. Steen, 角谷, P. Halmos, H. Stone 等ニヨッテ夫々ノ方法並ビニ結果ノ報告ガナサレツヽアル。以下ニハ"實數体トノ類似"ニ着目シテノ取扱ヒヲ述ベテミタイ。未ダ反省ガ足リナイカラ axiom 等多スギルカモ知レナイ。（尚 pythagorian ト云フ言葉ハ Weyl: Classical grup カラノ思ヒ付キデ適切カドウカハ分ラナイ）.

$\boxed{\text{公理群}}$ 實數体ヲ係數トシタ可換ナ環 $R$ ガ単位 $I$ ヲ有ッテヰルトスル。（以下実數ヲ小文字デ $a, b, \cdots\cdots, \lambda, \mu, \cdots\cdots$ 等 $R$ ノ元ヲ $A, B, C\cdots\cdots$ 等ト記ス）

$R$ ハ尚次ノ公理群ヲ満足スルトスル。

i) $A^2=0$ ナラ $A=0$

ii) $B^2$ ノ如ク表ハサレル元 $A$ ヲ"正ノ元"ト名ヅケルコトニスルト正ノ元ノ和ハ又正デアル。即チ $B, C$ ニ対シ $D$ ガ定ッテ $B^2+C^2=D^2$. ——之ガ pythagorian ノ由来デス. 又可換ト假定シタカラ積ニ関シテモ pythagorian 即チ正ノ元ノ積ハ正ニナル訳デス。

iii) $A$ ガ正ナルコトヲ $A>0$[1] ト書クコトニスルト "semi-order" $A>B$ ($A-B>0$ ノ意) ニ関シテ $R$ ハ lattice ヲ作ル。即チ任意ノ $A, B$ ニ対シ least upper bound $\sup(A,B)$, greatest lower bound $\inf(A,B)$ ガ定ル。

---

(1) trivial ナ正ノ元トシテ0ノ入ルコトハ云フ迄モナイ。

iii)′ 上ニ（下ニ）押ヘラレタ点列 $\{A_n\}$ ニ対シ同ジク $\sup_n(A_n)$ （$\inf_n(A_n)$）ガ定マル。

iv) <u>連続性</u>. $\sup_n A_n$, $\sup_n B_n$ ガ存在スル場合ニハ $(\sup_n A_n)\circ(\sup_n B_n)=\sup_{n,m}(A_n\circ B_m)$, 但 $\circ$ ハ $+$ 或ハ $\times$ ヲ示スモノトスル。

—（以上）—

公理群カラノ諸結果

1) $A>0$ トスルト $A=B^2$. $B_+=\sup(B,0)$, $B_-=\sup(-B,0)$ トヲクト $B=B_+-B_-$, 且ツ $B_+B_-=\sup(-B^2,0)=0$ ((iv)ニヨル) デアル。依テ $A$ ノ"正ノ二乗根" $A^{\frac{1}{2}}$ ガ

$$A^{\frac{1}{2}}=B_++B_- \qquad (A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=A)$$

ト定義出来ル。明ラカニ

$$A^{\frac{1}{2}}=\sup_C(C>0;\ C^2\leqq A)$$

2) $A>0$ トシ $A_1=\inf_n(A^n)$, $A_2=A-A_1$ トヲクト $A_1^2\geqq A_1$, $A_1A_2=0$ 且ツ $A_2^2\leqq A_2$

<u>証明</u>. $A_1^2=\inf_{n,m\geqq 1}(A^{n+m})\geqq A_1$. $A_1A_2\geqq 0$

且ツ $A_1A_2=A_1A-A_1^2=\sup_{n\geqq 1}(A^{n+1})-\sup_{n,m\geqq 1}(A^{n+m})=0$ カラ $A_1A_2=0$. 次ニ上カラ $A_2^2=A^2-2AA_1+A_1^2=A^2-A_1^2$

従ツテ $A^2 - A_1^2 \leqq A - A_1$ ヲ証明スレバヨイ。所ガ

$$A^{n+1} - A^2 - A^n + A = A(A-I)^2(A^{n-2} + A^{n-3} + \cdots\cdots + I) \geqq 0$$

ダカラ $\inf\limits_{n \geqq 1}(A^{n+1}) - A^2 \geqq \inf\limits_{n \geqq 1}(A^n) - A$ 即チ

$A \cdot A_1 - A^2 = A_1^2 - A \geqq A_1 - A$ ヲ得テ証明ヲ終ル。

3) 1) ニヨリ $0 < A < B$ ナラバ $0 < A^{\frac{1}{2}} < B^{\frac{1}{2}}$ ヨツテ 2) ニ

得タ $A_1$ ニ對シ $A_1 > A_1^{\frac{1}{2}} > A_1^{\frac{1}{2^2}} > \cdots\cdots > A_1^{\frac{1}{2^n}} > \cdots\cdots > 0.$

ヨツテ $\lim\limits_{n \to \infty} A_1^{\frac{1}{2^n}} = E$ ガ存在シ(1) 且ツ明ラカニ $E^2 = E$

(*idempotent*), $E \leqq A_1$. コノ $E$ ハ

$$AE = A_1 = A_1 E \geqq E,$$

$$A(I-E) = A_2 = A_2(I-E) \leqq I-E$$

ヲ満足スル。

<u>証明</u>. 先ヅ $A_2 E = 0$. 何者, $A_2 E = \lim\limits_{n \to \infty} A_2 A_1^{\frac{1}{2^n}}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} (A_2^{2^n} A_1)^{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n \to \infty} (A^{2^n - 1} \cdot A_2 A_1)^{\frac{1}{2^n}} = 0$. ヨツ

テ $AE = A_1 E + A_2 E = A_1 E$.

次ニ $A_1 \leqq A_1^2$ カラ $A_1^{2^n} \leqq A_1^{2^n+1}$, 之ヲ開イテ $A_1 \leqq A_1^{1+\frac{1}{2^n}}$.

---

(1) 点列 $\{B_n\}$ ニ對シ $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} B_n = \inf\limits_{m}(\sup\limits_{n \geqq m} B_n)$,

$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} B_n = \sup\limits_{m}(\inf\limits_{n \geqq m} B_n)$ ヲ定義スルトキ

$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} B_n = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} B_n$ ノトキ之レヲ $\lim\limits_{n \to \infty} B_n$ ト書ク。

従ッテ $A_1 \equiv A_1 E$. 一方 *idempotent* ト云フコトカラ $E \leqq I$ (1) ダカラ $A_1 \geqq A_1 E$ 即チ $A_1 = A_1 E$.

又 $A(I-E) = A_2 = A_2(I-E)$ ハ以上カラ明カデアルガ $A_2(I-E) \leqq I-E$ タ云フニハ $A_2 \leqq I$ ヲ云フトヨイガ之ハ $0 \leqq (I-A_2)^2 = I-2A_2+A_2^2 \leqq I-2A_2^2+A_2 = I-A_2$ (2) ニヨリ $A_2^2 \leqq A_2$) カラ明カデアル。

—— 以 上 ——

4)　2), 3) ヲ今一度マトメルト $A > 0$ ナルトキ $\lambda > 0$ ニ對シ

$$\boxed{E_\lambda = I - \left\{ \lim_m \left[ \inf_n \left( \frac{A}{\lambda} \right)^n \right]^{\frac{1}{2^m}} \right\}}$$

ト置クトキ

$$\boxed{\begin{gathered} E_\lambda^2 = E_\lambda, \quad E_\lambda A = E_\lambda \left(\frac{A}{\lambda}\right)\lambda \leqq \lambda E_\lambda, \\ A(I-E_\lambda) = \lambda\left(\frac{A}{\lambda}\right)(I-E_\lambda) \geqq \lambda(I-E_\lambda) \end{gathered}}$$

5)　$\lambda > \mu > 0$ ノトキ $E_\mu \leqq E_\lambda$ 且ツ $E_0 A = 0$, $E_\infty A = A$. 証明ハ 4) カラ明カ。ヨッテ $\lambda > \mu$ ノトキ $E_\lambda - E_\mu$ ハ又 *idempotent*.

何者, $E_\lambda \leqq I$ カラ $E_\lambda E_\mu \leqq E_\mu$ 且ツ $E_\lambda \geqq E_\mu$ ニヨリ $E_\mu^2 \leqq E_\lambda E_\mu$ ダカラ $E_\lambda E_\mu = E_\mu$ デアル. 斯クシテ

$$\boxed{(E_\lambda - E_\mu)^2 = E_\lambda - E_\mu \qquad \lambda > \mu}$$

---

(1)　$0 \leqq (I-E)^2 = I-2E+E^2 = I-E$

$$\boxed{A(E_\infty - E_0) = A}$$

5) $\lambda > \mu > 0$ ノトキ

$$\boxed{\lambda(E_\lambda - E_\mu) \geqq A(E_\lambda - E_\mu) \geqq \mu(E_\lambda - E_\mu)}$$

$\boxed{\text{証明}}$ $A(E_\lambda - E_\mu) = AE_\lambda(E_\lambda - E_\mu) = AE_\lambda(I - E_\mu)$ $\geqq \mu E_\lambda(I - E_\mu) = \mu(E_\lambda - E_\mu)$ （4) ニヨル。）

他ノ半分ノ不等式モ同様ニシテ得ラレル。

7) 5) ニヨリ $E_{\lambda-0} = \sup\limits_{\mu<\lambda} E_\mu$ ナル *idempotent* 存在シ，$E_\lambda - E_{\lambda-0}$ ハ又 *idempotent* ニナル。実ハ

$$\boxed{E_\lambda = E_{\lambda-0}}$$

証明. 6) カラ $\lambda(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = A(E_\lambda - E_{\lambda-0})$. 故ニ $(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = (I - E_\lambda)(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = 0$ （4) ト 5) トニヨル）。

8) $\boxed{\textit{spectral theorem}}$ $A > 0$, $\mu > 0$ トスル。$0$ ト $\mu$ ノ間ニ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ヲ挿入シ $0 < \lambda_i - \lambda_{i-1} < \varepsilon$ ナラシメル。$\lambda_i'$ ヲ $\lambda_i \leqq \lambda_i' \leqq \lambda_{i+1}$ ナラシメルト

$$-\varepsilon I \leqq AE_\mu - \sum_i \lambda_i'(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}) \leqq \varepsilon I.$$

何者，眞中ノ項ハ，$E_\mu = \sum_i (E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$ トヨクト，$(A - \lambda_i')(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$ ナル形ノ項ノ和ダカラ 6) ヲ使

ヘバ

$$\sum_i(\lambda'_i-\lambda_i)(E_{\lambda_{i+1}}-E_{\lambda_i})\leqq AE_\mu-\sum_i\lambda'_i(E_{\lambda_{i+1}}-E_{\lambda_i})$$

$$\leqq\sum_i(\lambda_{i+1}-\lambda'_i)(E_{\lambda_{i+1}}-E_{\lambda_i}).$$

故ニ $AE_\mu=\int_0^\mu\lambda\, dE_\lambda$

ト書ケル。$\mu\to\infty$ ナラシメルト5)ニヨリ

$$\boxed{A=\int_0^\infty\lambda\, dE_\lambda}$$

斯クシテ 正ノ元 ニ對スル spectral theorem ガデキタカラ，次カラハ之ヲ用ヒテ operational calculus ヲ取扱ッテミヨウ。

（ツヾク）